1 Funkcije

1.1 Teorijski deo

Definicija 1. Neka su dati neprazni skupovi A i B. Relacija $f \subseteq A \times B$ za koju važi:

1) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(x, y) \in f$;

2) $(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$;

naziva se funkcija.

Umesto $(x, y) \in f$ piše se $y = f(x)$. Skup A je domen funkcije f. Skup B je kodomen funkcije f. Funkcija predstavlja pravilo po kojem se elementima jednog skupa pridružuju elementi drugog skupa, pa se funkcija može shvatiti kao uredjena trojka domena, kodomena i pravila pridruživanja: (A, B, f). Dve funkcije su jednake ako i samo ako im se ova tri elementa podudaraju!

Definicija 2. Funkcija $f : A \to B$ za koju važi

$$(\forall x_1, x_2 \in A) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

se naziva injektivna funkcija ili "1-1".

Definicija 3. Funkcija $f : A \to B$ za koju važi

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) f(x) = y$$

se naziva surjekcija ili "na".

Definicija 4. Funkcija je bijektivna ako je "1-1" i "na".

Definicija 5. Neka su date funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Kompozicija funkcija f i g je funkcija $g \circ f : A \to C$ takva da je $(\forall x \in A)((g \circ f)(x) = q(f(x)))$.

Definicija 6. Funkcija $f : A \to B$ je monotono rastuća ako i samo ako $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.

Definicija 7. Funkcija $f : A \to B$ je monotono opadajuća ako i samo ako $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Definicija 8. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je parna ako i samo ako $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) = f(-x))$.

Definicija 9. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neparna ako i samo ako $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) = -f(x))$.

Napomena 1. *U definiciji parnosti, domen funkcije f ne mora biti ceo skup realnih brojeva, ali mora biti takav skup da ako $x \in \mathcal{D}(f)$ onda i $-x \in \mathcal{D}(f)$.*

Napomena 2. *Ukoliko nisu zadati domen i kodomen funkcije f (a to se neretko dešava :)), već samo pravilo, podrazumeva se da je domen date funkcije oblast definisanosti te funkcije, tj. skup svih vrednosti za koje se data funkcija može izračunati, dok je kodomen skup slika svih elemenata tako odredjenog domena.*

1.2 Zadaci

1. Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

$$a)\ f(x) = \frac{x^3 - 7}{x^2 - 5x + 6}; \qquad b)\ f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 6}; \qquad c)\ \log_{15}(x - 1); \qquad d)\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{e^x + 1}.$$

2. Ispitati parnost sledećih funkcija:

$$a)\ f(x) = \frac{1}{1 - |x|}; \qquad b)\ f(x) = \frac{x - x^3}{1 + x^2}; \qquad c)\ f(x) = \sqrt[3]{x};$$

$$d)^*\ f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \qquad e)\ f(x) = 3x^2 + x - 1.$$

3. Ispitati monotonost sledećih funkcija:

$$a)\ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2; \qquad b)\ f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$

$$c)\ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|; \qquad d)\ f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$$

$$e)\ f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{1 - x^2}; \qquad f)$$

4. Ako je funkcija f zadata sa $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ i funkcija g zadata sa $g(x) = \sqrt{x}$, odrediti $f \circ g$ i $g \circ f$.

5. Odrediti $f(x)$ ako je $f(x-4) = \frac{x-7}{x-2}$ za $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ispitati da li je preslikavanje $f(x)$ "1-1" i "na".

6. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$a)\ \ f(x) = \frac{3}{2+x^2}; \qquad b)\ \ f(x) = \frac{3}{1+|x|}$$

   (i) Ispitati koja od svojstava "1-1" i "na" ima funkcija f.

   (ii) Odrediti bar jedan par beskonačnih skupova A i B takvih da je $f : A \to B$ bijekcija i u tom slučaju naći $f^{-1} : B \to A$.

7. Za funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ naći f^{-1} ako postoji.

8. Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   ispitati:

$$(i)\ \ \text{parnost}; \qquad (ii)\ \text{monotonost}\ ; \qquad (iii)\ \text{odrediti}\ f^{-1}.$$

9. Za funkciju

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

   ispitati parnost i bijektivnost.

10. Da li postoji inverzna funkcija za funkciju $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $g(m,n) = (m+n, m+2n)$?